제 10차 교육과정 수능대비

당신의 Math를 위한 Maps

“야출의 코”

이과 수학 A

수학 I, 수학 II, 미적분

제이코사인 지음

목차

작성중

Start
0

교재 활용 시 유의사항

공부하기 전 반드시 알아두어야 할 사항

교재 버전 확인, 교재 내용 질문을 위해선 네이버 카페 꿀탐에 방문해주세요!

오류가 없는 교재를 만들기 위해 노력하고는 있습니다만 저도 사람인지라 완벽한 글을 쓸 수 있을 거라고는 생각하지 않습니다. 공부하기 전 홈페이지에서 읽으시려는 글이 가장 최신 버전인지 확인하시고 학습하시는 걸 권장합니다.

기본적인 이론 학습과 기출 풀이가 최소한 한번은 끝난 분들을 대상으로 작성했습니다.

이 책의 독자는 교육과정에서 헷갈리는 용어나 처음 보는 용어가 없다는 전제하에 작성된 글입니다. 수험생들이 어려워하거나 가지기 쉬운 오개념을 중점으로 서술했기에 각 Topic에 필요한 교과 내용이 아닌 해당 내용에 대한 기초적인 설명은 거의 수록하지 않을 것입니다. 또 기초적인 수준의 도구정리를 지향하는 글입니다. 이 글의 대상 독자는 수학을 처음 학습하는 상황이 아니므로 그동안 머리 싸매면서 고민해왔던 내용들을 하나로 정리하여 시험장에 가는걸 목표로 합니다. 만약 기본적인 이론 학습과 기출 풀이가 한번이라도 끝나지 않은 학생이라면 다시 되돌아가서 학습을 하고 이 교재를 보시는 걸 추천합니다.

공통 수학 1권, 문과 1권, 이과 2권으로 구성되는 교재입니다.

수능 출제 범위에 맞게 문과 교재는 수학 I, 수학 II, 확률과 통계를 다루며 이과 교재는 수학 I, 수학 II, 미적분을 다루는 교재와 수학 I, 수학 II, 기하를 다루는 교재로 이원화되어 출간됩니다. 또 수능 직접 출제 범위가 아닌 간접 출제 범위에 해당하는 초등학교와 중학교 수학은 공통 수학에서 다룹니다.

해당 교재에 사용된 문항은 대부분 평가원, 교육청, 사관학교에서 출제된 문항임을 밝힙니다.

이미 출제된 문제만 다뤄도 이야기할 내용이 상당히 많기 때문에 전부 서술할 수 없을지도 모르겠네요. 필요하다면 EBS 수능 특강이나 수능 완성에서 다룬 문항이나 논술에 출제된 문항, 제가 직접 제작한 문항으로 문제 상황을 설명하는 경우도 있습니다.

교육 과정을 철저하게 지키지는 않는 교재입니다. 수능에 도움이 된다면 적극적으로 사용합니다.

필요하고 실전적이면 뭐든지 도입해서 적극적으로 사용하여 문제를 풀어내는 것을 최우선의 목표로 합니다. 실제로 평가원은 교과 외 공식의 사용을 적극적으로 차단하는 모습을 상당히 많이 보여줬습니다만 그래도 출제 기관도 사람으로 구성되는 것인지라 이미 여러 부분에서 교육과정을 칼같이 지키면 기초적인 계산이더라도 손해를 보는 상황이 많이 나왔습니다. 따라서 이 교재에 새로 소개되는 교과 외 용어나 공식은 교육 과정 이내의 용어의 설명이 거의 전무한 것과 다르게 수능에 필요한 만큼 독자들이 이해 가능하게 서술할 것입니다.

Start
0

교재 활용 시 유의사항

단원별 명명법은 Tool으로 나뉩니다.

해당 교재는 기본적으로 Topic의 합으로 이루어져 있습니다. Topic I에서는 기초적인 문제 풀이 접근법을 다루고 정리하며 Topic II은 수험생이 문제 풀이 과정에서 어려워하거나 쉽게 가질 수 있는 오개념에 대해 다룹니다. 최종적으로 Topic III에서 복잡한 상황에 대한 대처법을 문제를 풀면서 학습하게 됩니다.

Topic I은 간단하게 소개하며 존재 의미도 처음 한번만 설명합니다.

Topic I은 교육 과정 지침서에 따라 수능 직접 범위에 해당하는 출제 요소들을 정리하고 해당하는 예시 문항과 간략한 문항 접근법을 서술해 놓은 것입니다. 해당 교재의 대상 독자의 수준을 감안할 때 답이나 문제 구체적인 문제 풀이는 필요가 없는 것으로 판단해 수록하지 않았습니다. 또한 간접 출제 범위와 엮인 문제의 소개는 처음 로그 함수와 지수 함수를 다룰 때 한번하고 나머지 범위를 빠르게 확인하는 것으로 구성했습니다.

Topic

1

교수 학습법에 맞는 직접 출제 범위 정리

Topic 1

로그함수와 지수함수

문항 소개

이하 문항은 수능을 출제하는 기관인 평가원에서 직접 출제한 문항입니다.

반드시 다음 페이지로 넘어가기 전에 모두 직접 마지막까지 계산하고 넘어가시길 바랍니다.

1. $\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}}$의 값은? [2점] … 2021학년도 수능

2. $\log_4 2n^2-\frac{1}{2}\log_2\sqrt{n}$의 값이 40 이하의 자연수가 되도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점] … 2021학년도 수능

3. 부등식 $\left(\frac{1}{9}\right)^x < 3^{21-4x}$을 만족시키는 자연수 x의 개수는? [3점] … 2021학년도 수능

4. 두 양수 x, y가 $\log_2(x+2y)=3$, $\log_2 x+\log_2 y=1$을 만족시킬 때, x^2+4y^2의 값을 구하시오. [3점] … 2022학년도 예시

5. $\log_2 5=a$, $\log_5 3=b$일 때, $\log_5 12$를 a, b로 정리하시오. [3점] … 2022학년도 평가원

6. 전파가 어떤 벽을 투과할 때 전파의 세기가 A에서 B로 바뀌면, 그 벽의 전파감쇄비 F는 $F=10\log(\frac{B}{A})$ (데시벨) 으로 정의한다. 전파감쇄비가 -7(데시벨)인 벽을 투과한 전파의 세기는 투과하기 전 세기의 몇 배인가? (단, $10^{\frac{3}{10}}=2$로 계산한다.) … 1999학년도 수능

7. 함수 $y=5^{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동 시켰더니 함수 $y=25\times5^{2x}+2$의 그래프가 되었다. $m+n$의 값은? [3점] … 2005학년도 평가원

8. 함수 $f(x)=2\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$가 닫힌구간 $[0,\ 12]$에서 최댓값 -4, 최솟값 m을 갖는다. $k+m$의 값은? (단, k는 상수이다.) [3점] … 2021학년도 평가원

9. 다음 조건을 만족시키는 세 정수 a, b, c를 더한 값을 k라 할 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오. [4점] … 2008학년도 평가원

(가) $1\le a\le 5$
(나) $\log_2(b-a)=3$
(다) $\log_2(c-b)=2$

10. 두 양수 a, b ($a>b$) 에 대하여 $9^a=2^{\frac{1}{b}}$, $(a+b)^2=\log_3 64$일 때, $\frac{a-b}{a+b}$의 값은? [4점] … 2020학년도 사관학교

11. 두 함수 $f(x)=2^{x-2}+1$, $g(x)=\log_2(x-1)+2$에 대하여 [보기]에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점] … 2009학년도 평가원

보기

ㄱ. $f^{-1}(5)g(5)+1=20$이다.
ㄴ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $y=f(x)$의 그래프와 $y=g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

Topic 1

로그함수와 지수함수

교수, 학습 및 평가 방법 유의사항

① 지수가 유리수 및 실수인 경우는 밑이 양수인 조건이 필요함을 이해하게 한다.
② 지수가 실수인 경우는 직관적으로 다룬다.
③ 로그의 성질은 지수의 성질과 관련지어 이해하게 한다.
④ 지수함수와 로그함수는 역함수 관계임을 그래프를 통해 확인하게 한다.
⑤ 지수와 로그 및 지수함수와 로그함수를 다룰 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.
⑥ 구체적인 자연 현상이나 사회 현상을 지수함수와 로그함수로 표현하고 이 과정에서 나타나는 간단한 방정식과 부등식을 풀어 문제를 해결해봄으로써 지수함수와 로그함수의 유용성과 가치를 인식하게 한다.
⑦ 지수와 로그의 성질에 대한 평가에서는 지수와 로그의 기본 성질을 이해하고 활용할 수 있는 능력을 평가하는 데 중점을 두고, 지나치게 복잡한 계산을 포함하는 문제는 다루지 않는다.

출제요소 체크 및 문제 풀이 접근

지수와 로그를 이용한 방정식은 결국 수학 상, 하에서 학습한 내용이다.

앞서 소개드린 문항들을 보면 결국 우리가 배운 방정식과 부등식에 지수와 로그를 합성시킨 문항이라는 것을 알 수 있습니다. 따라서 해당 지수와 로그를 이용한 방정식이나 부등식을 풀 때는 앞서 배운 수학 상, 하에서 학습한 방정식의 풀이로 귀결된다는걸 상기하고 있어야합니다.

밑과 진수의 조건을 체크한다.

교수, 학습 및 평가 방법 유의사항 ①, ③에서 밝힌 내용에 따르면 밑과 진수가 양수인 조건을 확인하는 것을 출제 요소로 포함하라고 명시하고 있습니다. 따라서 지수(함수)와 로그(함수)가 문제에 등장한다면 밑과 진수의 조건을 따지는 것이 급선무일 것입니다.

또 우리는 로그와 지수의 밑에 따라 로그함수와 지수함수의 그래프 개형이 변화하는걸 알고 있습니다. 따라서 밑이 1인 지점을 기준으로 케이스를 나누어 생각하는 것이 합리적일 것입니다.

로그함수와 지수함수는 서로 역함수관계이다.

기본적으로 로그함수와 지수함수는 서로 역함수인 관계가 아닌지 의심해야합니다. 실제로 로그의 정의에 따라 지수식이 유도됨으로 문제에서 주어진 함수가 로그함수와 지수함수 일 때 서로 역함수임을 알게 된다면 문제 풀이가 빠르게 진행되는걸 알 수 있습니다. 또한 필요에 따라 지수를 로그로, 로그를 지수로 자유자재로 변환할 수 있어야합니다.

Topic 1

로그함수와 지수함수

문항 소개

이하 문항은 수능을 출제하는 기관인 평가원에서 직접 출제한 문항입니다.

반드시 다음 페이지로 넘어가기 전에 모두 직접 마지막까지 계산하고 넘어가시길 바랍니다.

1. 자연수 n이 $2 \le n \le 11$일 때, $-n^2+9n-18$의 n제곱근 중에서 음의 실수가 존재하도록 하는 모든 n의 값의 합은? [3점]

… 2021학년도 평가원

2. 1보다 큰 세 실수 a, b, c가 $\log_a b = \frac{\log_b c}{2} = \frac{\log_c a}{4}$를 만족시킬 때, $\log_a b + \log_b c + \log_c a$의 값은? [3점]

… 2021학년도 평가원

3. 네 양수 a, b, c, k가 다음 조건을 만족시킬 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]

… 2020학년도 평가원

(가) $3^a = 5^b = k^c$
(나) $\log c = \log(2ab) - \log(2a+b)$

4. 직선 $x=k$가 두 곡선 $y=\log_2 x$, $y=-\log_2(8-x)$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=2$가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 곱은? (단, $0<k<8$) [4점]

… 2019학년도 평가원

5. 지수함수 $y=a^x$ ($a>1$)의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 B(4, 0)에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

… 2020학년도 수능

어차피 현실은 부들부들 중학교 / 고등학교 1학년 수학

앞 문제를 수월하게 푸셨나요?

그렇다면 다행이고 아니라도 괜찮습니다. 아직 시험까지는 시간이 많이 남았기 때문이지요. 앞에 수록해놓은 다섯 문항은 단 한 문제라도 해당 단원에서 배운 내용만 사용해서는 빠르게 문제를 풀 수가 없습니다. 따라서 간접 출제 범위의 개념까지 끌어와서 사용해야만 수월한 문제 풀이가 가능합니다.

구체적으로 어떤 요소가 문제 풀이 도구가 될 수 있는가?

간접 출제 범위에 해당하는 모든 내용이 중요한 문제 풀이의 도구가 될 수 있습니다. 새로운 미지수와 좌표의 도입, 평행이동과 대칭이동, 역함수 관계의 체크, 중학교에서 학습한 기하를 이용한 계산의 간소화가 이에 해당됩니다.

결국 문제가 어려운 이유는 간접 출제 범위의 수학을 못하기 때문입니다.

처음부터 여기까지 읽어오셨다면 의구심이 하나 들 것입니다. 우리가 시험보고자 하는 과목은 수학 I에서 지수함수와 로그함수 단원인데, 어째서 실제 고난도 문항에서는 해당 단원의 내용만으로 문제가 풀리지 않는 것일까요? 앞서 가장 먼저 풀어본 문제들만 계속 나온다면 시간이 걸렸으면 걸렸지 문제를 못 풀 이유는 없으니 편할 텐데 말이죠.

이는 실제로 간접 출제 범위가 존재하고 그 범위의 수학을 학생들이 어려워하기 때문입니다. 수능과 평가원 문제는 기본적으로 간접 출제 범위의 교육 과정을 문항 속에 자연스럽게 섞어 넣어 여러 가지 개념을 동시에 물어봄으로 학생들을 변별합니다. 따라서 우리가 당연하게도 문제를 풀다가 막히게 된다면 아주 높은 확률로 이 간접 출제 범위에 대한 내용을 제대로 학습하지 않고 있을 확률이 높습니다.

고난도 문항은 개념의 합이고 킬러 문항은 여러 고난도 문항의 합이다.

정말 출제 가능한 모든 상황이 시험이 출제되었는가? 라고 한다면 당연히 아니라고 대답할 것입니다. 출제 가능한 상황은 시험 범위가 박살난 지금도 여전히 무궁무진하고, 따라서 우리는 수능에서 난생 처음 보는 상황을 보며 문제를 풀어내야 원하는 대학에 갈 수 있게 됩니다. 이런 상황에서 문제를 잘 풀어내려면 간접 출제 범위의 문제들도 과하지 않은 선에서 꾸준히 풀고 복습하시는 것을 권장합니다.

Topic 1

삼각함수

문항 소개

이하 문항은 수능을 출제하는 기관인 평가원에서 직접 출제한 문항입니다.

반드시 다음 페이지로 넘어가기 전에 모두 직접 마지막까지 계산하고 넘어가시길 바랍니다.

1. $0 \le x \le \pi$일 때, 방정식 $1+\sqrt{2}\sin 2x = 0$의 모든 해의 합은? [3점] … 2018학년도 평가원

2. 반지름의 길이가 15인 원에 내접하는 삼각형 ABC에서 $\sin B = \frac{7}{10}$일 때, 선분 AC의 길이를 구하시오. [3점] … 2021학년도 평가원

3. $\overline{AB} = 8$이고 $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 15^\circ$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는? [3점] … 2021학년도 평가원

4. 함수 $y = 6\sin\frac{\pi}{12}x$ ($0 \le x \le 12$)의 그래프와 직선 $y = 3$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [3점] … 2022학년도 예시

5. $0 \le x \le 4\pi$일 때, 방정식 $4\sin^2 x - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3 = 0$의 모든 해의 합은? [4점] … 2021학년도 수능

6. $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB} = \overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD} = \sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이는? [3점] … 2021학년도 평가원

Topic 1

삼각함수

교수, 학습 및 평가 방법 유의사항

① 삼각함수의 개념은 중학교에서 학습한 삼각비와 연계하여 이해하게 한다.
② 삼각함수의 성질은 삼각함수의 그래프의 성질을 이해하는 데 필요한 정도로 간단히 다룬다.
③ 삼각함수의 그래프를 그리거나 삼각함수와 관련된 문제를 해결할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.
④ 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 각의 크기와 변의 길이 사이의 관계를 이해하고 삼각형의 넓이를 다양한 방법으로 구할 수 있게 한다.
⑤ 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 여러 가지 문제를 해결해봄으로써 삼각함수의 유용성과 가치를 인식하게 한다.
⑥ 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식은 삼각함수의 그래프를 해석하거나 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 간단한 경우만 다루되, 주어진 구간 안에서 해를 구하는 것만 다룬다.
⑦ 삼각함수와 그 그래프의 성질에 대한 평가에서는 기본적인 삼각함수의 그래프와 그 성질에 대한 이해 능력을 평가하는 데 중점을 두고, 복잡한 합성함수나 절댓값이 여러 개 포함된 함수와 같이 지나치게 복잡한 삼각함수를 포함하는 문제는 다루지 않는다.

출제요소 체크 및 문제 풀이 접근

삼각함수를 이용한 방정식은 결국 수학 상, 하에서 학습한 내용이다.

앞서 보여드린 문항들을 보면 결국 우리가 배운 방정식과 부등식에 삼각함수를 합성시킨 문항이라는 것을 알 수 있습니다. 따라서 해당하는 삼각함수를 이용한 방정식이나 부등식을 풀 때는 앞서 배운 수학 상, 하에서 학습한 방정식의 풀이로 귀결된다는 것을 상기해야 합니다.

삼각형의 넓이를 구하는데 필요한 요소는 이미 중학교 때 전부 배웠다.

사인법칙과 코사인법칙을 새로 배우지만 어디까지나 중학교 때 배운 삼각형의 넓이를 구하는 방법에서 그 요소를 구하는 용도입니다. 다만 삼각형의 넓이가 아니더라도 특정한 위치의 각이나 변의 길이를 구하는 데 유용하게 사용되니 숙지해야겠습니다.

삼각함수의 기본적인 성질을 자주 사용해서 문제를 해결한다.

사실 삼각함수가 그냥 이과 범위라 들어간 문제들도 존재해서 자주가 아닌 무조건이라는 말을 사용하지 못해 안타깝습니다만 삼각함수가 들어간 문제가 출제된다면 사실상 교과서에 명시된 삼각함수의 기본적인 성질 중 최소한 하나는 분명하게 사용하여 문제를 해결하는 경우가 대다수입니다.

Topic 1

수열

문항 소개

이하 문항은 수능을 출제하는 기관인 평가원에서 직접 출제한 문항입니다.

반드시 다음 페이지로 넘어가기 전에 모두 직접 마지막까지 계산하고 넘어가시길 바랍니다.

1. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_2=10$, $a_3+a_4+a_5=45$가 성립할 때, a_{10}의 값은? [2점]

… 2005학년도 수능

2. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에서 $\sum_{n=1}^{10} a_n=200$일 때, a_{11}의 값을 구하시오. [3점]

… 2006학년도 평가원

3. 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3=2$, $a_6=16$일 때, a_9의 값을 구하시오. [3점]

… 2007학년도 평가원

4. 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n에 대하여 $\frac{S_4}{S_2}=9$일 때, $\frac{a_4}{a_2}$의 값은? [3점]

… 2012학년도 평가원

5. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\frac{2n}{n+1}a_n$을 만족시킬 때, a_4의 값은? [3점]

… 2012학년도 수능

6. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=-n^2+n$을 만족시킨다. a_{11}의 값은? [3점]

… 2021학년도 수능

Topic 1

수열

교수, 학습 및 평가 방법 유의사항

① 여러 가지 수열의 합에서는 자연수의 거듭제곱의 합 $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$, $\sum_{k=1}^{n} k^3$과 수열의 합이 간단한 것만 다룬다.
② 수열과 관련된 여러 가지 문제를 귀납적으로 표현할 수 있게 하고, 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구하는 문제는 다루지 않는다.
③ 수학적 귀납법에 대한 증명은 원리를 이해할 수 있는 정도로 간단하게 다룬다.
④ 수학적 귀납법은 자연수 n에 대한 명제의 증명 방법으로서 그 유용성과 가치를 인식하게 한다.
⑤ 기호 S_n은 교수, 학습 상황에서 사용할 수 있다.
⑥ 등비수열과 그 합을 이용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가할 때 연금의 일시 지급이나 대출금 상환 등과 같이 지나치게 복잡한 상황을 포함하는 문제는 다루지 않는다.

출제요소 체크 및 문제 풀이 접근

결국 규칙이 있는 수열은 교육과정에서 배운 수열과 망원급수와 같이 간단한 수열이 전부다.

시험장에서 마주칠 문제는 특별한 방식의 문제 풀이법을 요구하는게 아닙니다. 정말 간단하게 나열해서 규칙성을 찾거나 귀납적으로 정의된 수열의 식조작을 통해 우리가 교육과정에서 배운 수열로 관계식을 이끌어내는 문제가 절대 다수를 차지하게 됩니다. 따라서 시험장에서 수열 문제를 만나게 된다면 보통 나열을 하거나 나열이 여의치 않으면 관계식을 조작해 문제를 풀게됩니다.

수열의 일반항은 등차수열과 등비수열일 때만 구한다.

지나치게 복잡한 상황은 굉장히 주관적인 말이기 때문에 이것으로 시비를 걸기는 쉽지 않지만 문제 유형에 대한 시비는 명확하게 구분됩니다. 수열의 일반항은 등차수열과 등비수열일 때만 구해 계산하고 기타 귀납적으로 정의된 수열의 일반항은 구하지 않습니다.

수열은 함수다.

수열은 정의역이 자연수인 함수입니다. 따라서 수열의 일반항이나 수열의 합에 대한 식을 우리가 아는 그래프 위에 올려놓고 점을 찍어 문제 상황을 쉽게 파악하는 것도 가능합니다. 등차중항과 등비중항도 이와 마찬가지로 단순히 수식으로 증명하고 넘어가기보다 그래프를 그려 식의 의미를 살려보면서 학습하는 것을 권장합니다.

Topic 2

로피탈의 정리

절음발이 정리

로피탈의 정리의 증명을 모르더라도 사용법은 제대로 알고 쓰자.

로피탈의 정리는 이미 수십 년간 수능 시장에서 애용된 정리입니다. 하지만 엄밀한 증명은 고교과정에서 불가능하고 실제로 로피탈의 정리를 사용할 수 있는 여러 상황과는 다르게 제한된 상황에서만 학생들이 학습하고 연습하다보니 해당 내용에 대한 오해가 많은 편이기도 합니다. 특히 커뮤니티 등지에서 로피탈의 정리의 역이라든지 역로피탈이라 소개되는 내용을 보면 어이없기 짝이 없죠. 증명은 복잡하고 수능에는 도움이 안되니 생략합니다만 해당 정리를 올바르게 사용하기 위해 몇 가지 사용 예시를 보여드리겠습니다. 아래 정리를 읽어보시고 문제를 풀어보시길 바랍니다.

로피탈의 정리

두 함수 $f(x)$와 $g(x)$ 모두 아래 조건을 만족시키면, $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$이다.

① c를 포함하는 열린 구간에서 연속이고 미분가능하다.

② $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=0$이거나 $\lim_{x\to c}f(x)=\lim_{x\to c}g(x)=\pm\infty$이다.

③ $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$가 존재한다.

④ c를 제외한 열린 구간의 모든 점 x에서 $g'(x)\neq 0$이다.

이하 문항은 수능을 출제하는 기관인 평가원에서 직접 출제한 문항입니다.

반드시 다음 페이지로 넘어가기 전에 모두 직접 마지막까지 계산하고 넘어가시길 바랍니다.

1. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여 $F(x)=\ln|f(x)|$라 하고, 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$에 대하여 $G(x)=\ln|g(x)\sin x|$라 하자. $\lim_{x\to 1}(x-)F'(x)=3$이고, $\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$일 때, $f(3)+g(3)$의 값은? [4점] … 2018학년도 평가원

Topic 2

로피탈의 정리

인수 정리를 사용하는 문제인건 알고있고.. 로피탈의 정리를 8번 써야하나..?

라고 생각하셨다면 평가원의 함정에 걸리셨습니다. 실제로 이 문제를 로피탈을 8번이나 써서 풀이하면 인수 정리를 정직하게 사용하는 것보다 훨씬 비효율적인 계산을 끌고 나가야합니다. 아는 로피탈의 정리를 제대로 학습하지 않고, 사용처조차도 제대로 알지 못한 상태에서 남용해서 그런데, 그래서 로피탈의 정리를 이용한 간결한 풀이를 소개시켜 드리겠습니다.

먼저, $\lim_{x\to 1}(x-1)F'(x)=\lim_{x\to 1}\frac{F'(x)}{\frac{1}{x-1}}=3$와 $\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{G'(x)}=\frac{1}{4}$가

로피탈의 정리에 의해 각각 $\lim_{x\to 1}\frac{F(x)+c_1}{\ln|x-1|+c_2}=3$와 $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)+c_3}{G(x)+c_4}=3$임을 알고 있습니다.

$\frac{\infty}{\infty}$의 극한이어야 해당식이 수렴할테니 $F(1)=0$이고, $G(0)=0$이니

$F(0)=0$임을 구할 수 있습니다.

고교과정에서는 방정식의 계수가 실수인 것만 다루니 다음과 같은 식조작이 가능합니다.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\frac{\ln|x|}{\ln|x-1|}+\frac{\ln|x^2+ax+b|}{\ln|x-1|}+\frac{c_1}{\ln|x-1|}}{1+\frac{c_2}{\ln|x-1|}}=3$$

$f(x)$가 허수근을 가지면 해당 조건에 모순이므로 $f(x)=x(x-1)^3$임을 쉽게 알 수 있습니다.

같은 방법으로 다른 조건에 대한 식조작을 가하면,

$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3\ln|x-1|}{\ln|x|}+1+c_3}{1+\frac{\ln|x^2+cx+d|}{\ln|x|}+c_4}=\frac{1}{4}$임을 알게 됩니다.

역시 같은 방법으로 $g(x)$가 허수근을 가지면 해당 조건에 모순이므로 $g(x)=x^3$입니다.

따라서 정답은 $f(3)+g(3)=24+27=51$이 되겠습니다.

저는 책에서 설명하는 입장이라 상세하게 적어야하니 풀이가 좀 길어보이는데, 실제로 풀이해보면 계산이 거의 없는 문제인걸 알 수 있습니다. 로피탈의 정리를 제대로 학습하지 않은 학생들에게 경종을 울리는 문제였네요.